

# O lema de Zorn e tudo isso

Fernando Ferreira  
Universidade de Lisboa

Relembremos que dada uma ordem parcial  $(X, \leq)$ , uma *cadeia*  $C$  é um subconjunto de  $X$  tal que quaisquer dois elementos são comparáveis (i.e., se  $x, y \in C$  então  $x \leq y$  ou  $y \leq x$ ). Uma cadeia diz-se *maximal* se não estiver contida propriamente noutra cadeia.

**Proposição 1** (Princípio da cadeia maximal). *Seja  $(X, \leq)$  uma ordem parcial. Então  $X$  tem uma cadeia maximal.*

**Demonstração.** Admitamos, com vista a um absurdo, que não há cadeias maximais em  $X$ . Então,  $\forall C \in \text{Cadeias}(X) \exists C' \in \text{Cadeias}(X) [C \subsetneq C']$ . Pelo axioma da escolha, existe uma função  $f : \text{Cadeias}(X) \mapsto \text{Cadeias}(X)$  tal que  $C \subsetneq f(C)$ , para toda a cadeia  $C$  de  $X$ . Ora, como sabemos, o conjunto  $\text{Cadeias}(X)$  munido da ordem “ $\subseteq$ ” é um conjunto completo para cadeias e, é claro,  $f$  é uma expansão neste conjunto completo para cadeias. Pelo teorema do ponto fixo de Zermelo,  $f$  tem um ponto fixo. Isto é absurdo.  $\square$

O seguinte resultado, utilizado frequentemente em Matemática, é um corolário simples do teorema anterior:

**Proposição 2** (Lema de Zorn). *Seja  $(X, \leq)$  uma ordem parcial em que toda a cadeia tem majorante. Então  $X$  tem elemento maximal.*

**Demonstração.** Pelo teorema anterior, seja  $C$  uma cadeia maximal de  $X$ . Tome-se  $x$  um majorante de  $C$ . Claramente,  $x$  é elemento maximal de  $X$ .  $\square$

**Proposição 3** (Princípio da boa ordenação). *Todo o conjunto pode ser bem ordenado.*

**Demonstração.** Seja dado  $X$  um conjunto e tome-se  $\alpha$  o máximo dos ordinais entre  $\omega$  e o número de Hartogs  $h(X)$ . Considere-se o conjunto  $\mathcal{F}$  de todas as funções injectivas da forma  $f : \beta \mapsto X$ , com  $\beta < \alpha$ . Claro que  $(\mathcal{F}, \subseteq)$  é uma ordem parcial. Para além disso, se  $\mathcal{C}$  é uma cadeia de funções de  $\mathcal{F}$ , a união  $\bigcup \mathcal{C}$  ainda é uma função injectiva e o seu domínio é claramente um segmento inicial de  $\alpha$ . Ora, este segmento inicial não pode ser todo o  $\alpha$ , pois  $\alpha$  é pelo menos  $h(X)$ . Argumentámos, portanto, que toda a cadeia de  $(\mathcal{F}, \subseteq)$  tem majorante. Pelo lema de Zorn, esta ordem tem um elemento maximal  $f : \beta \mapsto X$ . É fácil de argumentar que  $\text{im} f = X$ : com efeito, se não fosse, tomava-se um elemento  $x_0 \in X \setminus \text{im} f$ ; então a função  $f \cup \{(\beta, x_0)\}$  de domínio  $\beta + 1$  (note-se que

$\beta + 1 < \alpha$ , pois  $\alpha$  é ordinal limite) estaria em  $\mathcal{F}$ ; isto entra em contradição com a maximalidade de  $f$ .

Agora, dado que o elemento maximal  $f$  é uma bijecção entre um ordinal e  $X$ , conclui-se que  $X$  pode ser bem-ordenado.  $\square$

**Exercícios.** *Mostre que a teoria Z juntamente com o princípio da boa ordenação demonstra o axioma da escolha.*

**Proposição 4** (Comparabilidade das cardinalidades). *Dados conjuntos  $X$  e  $Y$ , então  $X \leq_c Y$  ou  $Y \leq_c X$ .*

**Demonstração.** Pelo teorema anterior, podemos munir  $X$  e  $Y$  de boas ordens. Ora, como sabemos, as boas ordens ou são isomorfas ou uma delas é isomorfa a um segmento inicial da outra. O resultado sai agora trivialmente.  $\square$

O axioma da escolha é necessário para demonstrar qualquer dos quatro teoremas acima. Com efeito:

**Teorema (Equivalências ao axioma da escolha).** *Na teoria ZF os seguintes princípios são equivalentes:*

1. *Axioma da escolha.*
2. *Princípio da cadeia maximal.*
3. *Lema de Zorn.*
4. *Princípio da boa ordenação.*
5. *Princípio da comparabilidade das cardinalidades.*

**Demonstração.** Viu-se que  $(1) \rightarrow (2) \rightarrow (3) \rightarrow (4) \rightarrow (5)$ . É fácil mostrar que  $(4) \rightarrow (1)$ . Logo, basta ver que  $(5) \rightarrow (4)$ . Seja  $X$  um conjunto qualquer. Por (5),  $X \leq_c h(X)$  ou  $h(X) \leq_c X$ , onde  $h(X)$  é o número de Hartogs de  $X$ . Por definição de  $h(X)$  não se tem o segundo caso. Logo,  $X \leq_c h(X)$ , i.e., existe uma injeção de  $X$  no ordinal  $h(X)$ . Então, claramente que  $X$  pode ser bem ordenado.  $\square$

Podem mostrar-se que estas equivalências também valem em Z.