O universo cumulativo

Fernando Ferreira
Universidade de Lisboa

Definição 1 (Hierarquia cumulativa)**.** *Define-se, por recursão transfinita nos ordinais, a seguinte operação $\alpha \rightsquigarrow V_\alpha$:*

$$\begin{cases} V_0 & = & \emptyset \\ V_{\alpha+1} & = & \mathcal{P}(V_\alpha) \\ V_\gamma & = & \bigcup_{\beta<\gamma} V_\beta, \text{ se } \gamma \text{ é ordinal limite} \end{cases}$$

A classe constituída pelos conjuntos que estão nalgum V_α denota-se por V. Informalmente, $V = \bigcup_\alpha V_\alpha$.

Proposição 1. *Para ordinais α e β, têm-se as seguintes propriedades:*

1. $\forall x \forall y\, (x \in V_\alpha \wedge y \in x \to \exists \beta < \alpha\, (y \in V_\beta))$.
2. $\beta \leq \alpha \to V_\beta \subseteq V_\alpha$.
3. *V_α é um conjunto transitivo.*

Demonstração. A primeira propriedade demonstra-se por indução transfinita em α. Os casos em que α é 0 ou sucessor são imediatos. Suponhamos que α é ordinal limite. Por hipótese, $x \in V_\alpha$ e, portanto, $x \in V_\gamma$ para certo $\gamma < \alpha$. Por hipótese de indução transfinita, existe $\beta < \gamma$ tal que $y \in V_\beta$. Claro que $\beta < \alpha$.

A segunda propriedade também se demonstra por indução transfinita em α. Só o caso sucessor não é trivial. Seja $\beta \leq \alpha + 1$. Basta estudar o caso em que $\beta \leq \alpha$. Ora, por hipótese de indução transfinita, tem-se $V_\beta \subseteq V_\alpha$. Agora, basta mostrar que $V_\alpha \subseteq V_{\alpha+1}$. Tome-se $x \in V_\alpha$. Com vista a mostrar que $x \subseteq V_\alpha$, tome-se $y \in x$ ao arbítrio. Por (1), existe $\gamma < \alpha$ tal que $y \in V_\gamma$. Por hipótese de indução transfinita, $y \in V_\alpha$. Como se queria.

A terceira propriedade sai imediatamente das duas primeiras. $\square$

Corolário 1. *Para todo o ordinal α, $\alpha \in V_{\alpha+1}$.*

Demonstração. A demonstração é por indução transfinita em α. O caso 0 é imediato, pois $V_1 = \{0\}$. Se, por hipótese de indução transfinita, $\alpha \in V_{\alpha+1}$ então, por (3) da proposição anterior, $\alpha \subseteq V_{\alpha+1}$. Conclui-se que $\alpha \cup \{\alpha\} \subseteq V_{\alpha+1}$, i.e., $\alpha + 1 \in V_{\alpha+2}$. Considere-se agora γ um ordinal limite. Por hipótese de indução transfinita, $\forall \alpha < \gamma\, (\alpha \in V_{\alpha+1})$. Logo, $\forall \alpha < \gamma\, (\alpha \in V_\gamma)$, ou seja, $\gamma \subseteq V_\gamma$. Portanto, $\gamma \in V_{\gamma+1}$. $\square$

Exercício 1. *Mostre que, para todo α, $\alpha \notin V_\alpha$.*

Do corolário acima conclui-se que a classe V contém todos os ordinais e, consequentemente, é uma classe própria. Vamos ver, de seguida, que a teoria ZF demonstra que a classe V é todo o universo dos conjuntos. Antes, porém, é conveniente demonstrar o seguinte lema que diz que o axioma da fundação também é verdadeiro para classes:

Lema 1. *Seja C uma classe não vazia. Então existe um elemento $y \in C$ tal que $y \cap C = \emptyset$.*

Demonstração. Tome-se $x \in C$. Seja $z = TC(\{x\})$, i.e., z é o fecho transitivo do conjunto singular $\{x\}$. Note-se que z é um conjunto transitivo e $x \in z$. Pelo axioma da separação, $z \cap C$ é um conjunto. Note-se que este conjunto é não vazio. Logo, pelo axioma da fundação, existe $y \in z \cap C$ tal que $y \cap z \cap C = \emptyset$. Como $y \subseteq z$ (visto que z é transitivo), vem $y \cap C = \emptyset$. □

Proposição 2 (Princípio da $\in$-indução)**.** *Seja C uma classe e admitamos que*

$$\text{(Condição de Progressão)} \qquad \forall x((\forall z \in x\ (z \in C)) \rightarrow x \in C),$$

então C é a classe universal.

Demonstração. Admitamos, com vista a um absurdo, que a classe complementar C^c é não vazia. Pelo lema anterior, existe $x \in C^c$ tal que $x \cap C^c = \emptyset$. Por outras palavras, se $z \in x$ então $z \in C$. Pela condição de progressão conclui-se que $x \in C$, o que é absurdo. □

Teorema (Universo cumulativo). *Para todo o conjunto x, existe um ordinal α tal que $x \in V_\alpha$.*

Demonstração. Seja x um conjunto ao arbítrio e admitamos que, para todo $z \in x$, existe α tal que $z \in V_\alpha$. Então, podemos definir uma operação que, a cada elemento z de x, faz corresponder o menor número ordinal α tal que $z \in V_\alpha$. Pelo axioma da substituição, estes números ordinais formam um conjunto e, portanto, podemos tomar um ordinal β que os majore a todos. Temos, pois, $\forall z(z \in x \rightarrow z \in V_\beta)$, ou seja, $x \subseteq V_\beta$. Logo, $x \in V_{\beta+1}$. O resultado sai por $\in$-indução. □

O teorema anterior mostra que todo o conjunto aparece numa certa etapa V_α da hierarquia cumulativa. O primeiro ordinal α tal que $x \in V_\alpha$ é, obviamente, um ordinal sucessor. Denota-se por $cota(x)$ o menor ordinal α tal que $x \in V_{\alpha+1}$. Pelos resultados já demonstrados, a operação $x \rightsquigarrow cota(x)$ verifica as seguintes propriedades: se $x \in y$, então $cota(x) < cota(y)$; dado α um ordinal, $cota(\alpha) = \alpha$.