Emendando o *Grundgesetze der Arithmetik* de Frege

FERNANDO FERREIRA

Universidade de Lisboa

SUMÁRIO ALARGADO*

Faz cem anos no dia 16 de Junho de 2002 que Bertrand Russell escreveu uma carta a Gottlob Frege a comunicar-lhe que o seu sistema dos *Grundgesetze der Arithmetik* era inconsistente. Numa linguagem moderna, o sistema de Frege consiste na lógica de segunda-ordem (são permitidas quantificações sobre objectos $\forall x$, $\exists x$, e sobre conceitos $\forall G$, $\exists G$) munida dum operador de extensionalidade $\hat{}$ que, a cada fórmula da linguagem $A(x)$, associa um termo $\hat{x}.A(x)$. Numa linguagem interpretada, estes termos denotam objectos. O operador de extensionalidade obedece à famosa Lei V de Frege:

$$\hat{x}.A(x) = \hat{x}.B(x) \leftrightarrow \forall x(A(x) \leftrightarrow B(x)).$$

[Leia-se: a extensão de A é a mesma que a extensão de B se, e somente se, os objectos que caem sob A e sob B são os mesmos.] O paradoxo de Russell surge neste enquadramento. Defina-se $x \in y$ (x é elemento de y) por $\exists G(Gx \wedge y = \hat{z}.Gz)$ e considere-se o objecto $\hat{x}.(x \notin x)$. Este objecto é elemento de si próprio se, e somente se, não é: Russell *dixit*. O diagnóstico tradicional imputa a inconsistência à presunção de que todo o conceito possui extensão – nomeadamente, de que o conceito "$x \notin x$" possui extensão.

Num diagnóstico não tradicional, mas que encontra raízes em Henri Poincaré e no próprio Russell, Michael Dummett atribui a inconsistência dos *Grundgesetze* primariamente ao modo descuidado com que Frege encarou a quantificação de segunda-ordem. Nas palavras de Dummett "(Frege's) amazing insouciance concerning the second-order quantifier was the primary reason for his falling into inconsistency". Dummett observa que o conceito

*Este texto sumaria o artigo "Amending Frege's *Grundgesetze der Arithmetik*", a aparecer na revista *Synthese* de Russell está definido *impredicativamente*. Um elemento x cai sob a conceito de Russell exactamente no caso em que, para todo o conceito G – incluindo o próprio conceito de Russell – x não cai sob G no caso de x ser a extensão de G. Em suma, o conceito de Russell está definido através duma quantificação sobre uma totalidade que inclui o próprio conceito que se está a definir. Esta é a marca duma definição impredicativa.

A impredicatividade dos *Grundgesetze* está disfarçada por uma regra implícita de substituição: duma generalização de segunda-ordem da forma $\forall G(\ldots G \ldots)$ pode concluir-se $\ldots R \ldots$, para qualquer propriedade R, seja ela predicativamente definível ou não. Essa regra de substituição equivale a um princípio muito forte de *compreensão*, a saber:

$$\exists G \forall x(Gx \leftrightarrow F(x)),$$

aplicado irrestritamente a qualquer fórmula da linguagem $F(x)$. Se se restringir o princípio de compreensão às fórmulas $F(x)$ em que não ocorram quantificações de segunda-ordem, obtém-se a lógica de segunda-ordem predicativa. Em 1996, Richard Heck mostrou que o sistema de Frege dos *Grundgesetze*, restrito à lógica de segunda-ordem predicativa, é consistente. Por outras palavras: *numa leitura predicativa, pode supor-se coerentemente que todo o conceito tem extensão.*

O resultado de Heck veio dar alguma justificação ao diagnóstico de Dummett. Tendo em conta que o objectivo fundamental da obra de Frege era fundamentar a aritmética e a análise matemática na lógica (*logicismo*), coloca-se naturalmente a questão: será que a aritmética se pode fundamentar no sistema *consistente* da lógica de segunda-ordem predicativa munida do operador de extensionalidade regulado pela Lei V? Infelizmente, a resposta parece ser negativa. O sistema de Heck é largamente inoperacional para o desenvolvimento da aritmética. Nos *Grundgesetze*, Frege consegue desenvolver a aritmética utilizando definições impredicativas *ad libitum*. Por exemplo, a noção central de ancestralidade duma relação R é impredicativa. Com efeito, dado um objecto y, o conceito que é verdade exactamente dos elementos x que são ancestrais de y por meio da relação R define-se assim: x cai sob esse conceito se, do facto de z ser x ou cair sob um conceito F, se seguir que cada objecto com o qual z se encontre na relação R cai também sob F, então, independentemente de que conceito F se trate (incluindo o próprio conceito de ancestral de y), y cai sob o conceito F. Frege define os números naturais como aqueles objectos para os quais o número zero é ancestral relativamente à relação ‘predecessor imediato’. O desenvolvimento Fregeano da aritmética nos *Grundgesetze* é impredicativo.

Nos seus estudos, Heck também se debruça sobre a generalização do seu sistema à lógica predicativa *ramificada*. Nesta lógica, as variáveis de segunda-ordem (que variam nos conceitos) distribuem-se por vários níveis, cada qual associado a um número natural. Há os conceitos de nível zero, que incluem aqueles que se podem definir por compreensão através de fórmulas sem nenhuma quantificação de segunda-ordem (como no caso predicativo normal). Há os conceitos de nível 1, que incluem aqueles que se podem definir por compreensão através de fórmulas em que agora se permite a ocorrência de quantificações de segunda-ordem, mas apenas de nível zero. Há os conceitos de nível 2, que incluem aqueles que se podem definir por compreensão através de fórmulas em que se permite a ocorrência de quantificações de segunda-ordem de nível zero e de nível 1. E assim sucessivamente, obtendo-se uma hierarquia de conceitos, mais e mais abrangente conquanto o nível dos conceitos vá aumentando.

Se denotarmos o nível duma variável por um índice superior, o princípio de compreensão da lógica ramificada toma a forma:

$$\exists G^n \forall x (G^n x \leftrightarrow F(x)),$$

onde $F(x)$ é uma fórmula onde apenas ocorrem quantificações de segunda-ordem de nível inferior a n. Heck observou que a versão predicativa ramificada dos *Grundgesetze* também é consistente sendo, porém, ainda inoperacional em termos matemáticos.

Nos *Principia Mathematica*, Russell e Whitehead depararam-se com um problema análogo. O sistema dos *Principia* constituiu a resposta logicista de Russell ao seu próprio paradoxo. O sistema lógico de Russell e Whitehead contém todas as ordens finitas, i.e., a ordem dos objectos, a ordem dos conceitos, a ordem dos conceitos de conceitos, a ordem dos conceitos de conceitos de conceitos, *et cœtera* e misturas de tais (tipos). No sistema lógico dos *Principia* há todos estes tipos lógicos, enquanto que nos *Grundgesetze* há apenas dois tipos (as duas ordens). No entanto, nem o operador de extensionalidade, nem a concomitante Lei V, fazem parte dos *Principia* (o que evita a contradição de Russell). Adicionalmente, o sistema de Russell e Whitehead é, por opção filosófica, um sistema predicativo, ramificando todos os tipos (com excepção do tipo dos objectos) em níveis. Esta opção tem o condão de paralisar matematicamente o sistema. Para obstar a este dificuldade, Russell propôe o Axioma de Redutibilidade: num dado tipo, cada predicado é co-extensional a um predicado de nível zero. Russell é pragmático em relação ao Axioma da Redutibilidade, considerando-o um defeito necessário do sistema.

Na versão predicativa ramificada dos *Grundgesetze*, o Axioma da Redutibilidade toma a seguinte forma simples: para qualquer nível n,

$$\forall F^n \exists G^0 \forall x (F^n x \leftrightarrow G^0 x).$$

O axioma tem como efeito fazer ressurgir o paradoxo de Russell. Assim, ao invés dos *Principia*, no enquadramento Fregeano a adjunção do Axioma da Redutibilidade torna o sistema inconsistente.

Suponhamos que sob um determinado conceito cai apenas um número finito de objectos. Sejam eles $a_1, \ldots, a_n$. Então o conceito em apreço é co-extensional com o conceito de nível zero (definido com a ajuda de parâmetros) "$x = a_1 \vee x = a_2 \vee \ldots \vee x = a_n$". Informalmente, o *Axioma da Redutibilidade Finita* diz que todo o conceito sob o qual apenas cai um número finito de objectos é co-extensional a um conceito de nível zero (com parâmetros). Não parece descabido defender que este axioma é uma verdade analítica.

A formulação do Axioma da Redutibilidade Finita no sistema ramificado de Heck não é automática, pois a noção de finitude não é uma noção de primeira-ordem. Propõe-se para a sua formulação um tríplice constituído por duas definições e pelo axioma de redutibilidade *strictu sensu*:

i) Num conceito de nível zero F^0 cai apenas um número finito de objectos se, por definição, for possível fazer uma lista desses objectos de tal modo que, para qualquer porção (não vazia) desses objectos, um deles ocorra necessariamente em primeiro lugar na lista e outro ocorra em último lugar. Tecnicamente: se F^0 puder ser duplamente bem-ordenado através duma ordem de nível zero, escrevendo-se $Fin(F^0)$, no sentido em que todo o subconceito de F^0, não vazio (i.e., verdadeiro de alguma coisa) e de nível zero, tem elemento mínimo e elemento máximo.

ii) Para um conceito G^n de um nível qualquer n, tem-se $Fin(G^n)$ se, por definição, G^n for co-extensional a um conceito de nível zero sob o qual cai apenas um número finito de objectos.

iii) Para todo o nível n, tem-se o seguinte princípio de redutibilidade: $\forall F^0 \forall G^n (Fin(F^0) \wedge G^n \subseteq F^0 \rightarrow Fin(G^n))$.

O sistema ramificado de Heck, imbuído do princípio (iii) e das correspondentes definições (i) e (ii) *é consistente e nele pode desenvolver-se a aritmética de Peano de primeira-ordem.* Demonstra-se que a noção de ancestrabilidade de Frege para conceitos de nível 1 (formulada com quantificações de nível 1) é, neste sistema ramificado alargado, co-extensional com um conceito também de nível 1 (e não apenas de nível 2, como seria sem redutibilidade). Este é o ponto essencial, pois permite desenvolver a aritmética por linhas essencialmente Fregeanas.

A visão logicista da aritmética não se contenta com um formalismo não interpretado, pois procura dar definições lógicas das noções matemáticas. Deste ponto de vista, há que justificar a correcção da definição (i). Esta definição exige que todo o subconceito de *nível zero*, não vazio, de F^0 tenha máximo e mínimo numa determinada ordem, sendo silenciosa sobre os subconceitos de nível diferente de zero. Ora, se a definição proposta está correcta, então *todo* o subconceito não vazio de F^0, de nível zero ou não, tem máximo e mínimo na ordem em questão. Usando (iii), pode demonstrar-se formalmente que este é, efectivamente, o caso. Todavia, usámos a correcção da definição em (i) para, precisamente, justificar a aceitação de (iii). Estamos a andar em círculo. Um círculo possivelmente virtuoso, mas um círculo na mesma.

O círculo pode ser rompido. A correcção da definição *lógica* de finitude dada em (i) pode justificar-se *desde que* se postule que os conceitos de nível zero sejam fechados para a forma linguística "há um número finito de objectos x tal que $\ldots x \ldots$". Observe-se que o enunciado deste postulado faz sentido, pois não se pode deixar de pressupor a noção informal de finitude quando se tenta justificar a sua definição formal. Em suma, desde que se aceite que a noção de finitude é legítima (em algum sentido filosófico e/ou matemático) e, concomitantemente, se subscreva o Axioma da Redutibilidade Finita, então é possível desenvolver consistentemente a aritmética de Peano de primeira-ordem na versão predicativa ramificada dos *Grundgesetze der Arithmetik*.

Bibliografia

1. Dummett, Michael: *Frege: Philosophy of Mathematics*, Harvard University Press, Cambridge, Massachusetts, 1991.

2. Heck, Richard: The Consistency of Predicative Fragments of Frege's *Grundgesetze der Arithmetik*, *History and Philosophy of Logic*, **17** (1996), pp. 209-220.

3. Russell, Bertrand: *Introduction to Mathematical Philosophy*, Dover Publications, Inc., 1993. Publicado pela prineira vez em 1919.