Sentenças de Horn

Este texto consiste numa adaptação do parágrafo 17.3 (capítulo 17) do livro adoptado.

Recorde-se que uma sentença na FNC (forma normal conjuntiva) é uma conjunção de uma ou mais sentenças, cada uma delas uma disjunção de um ou mais literais.
Um literal diz-se **positivo** se é uma sentença atómica; **negativo** se é a negação de uma sentença atómica.

Definição 1. Uma sentença diz-se **sentença de Horn** se estiver na FNC e em cada disjunção de literais houver no máximo um literal positivo.

No exemplo que se segue todas as sentenças estão na FNC mas nenhuma delas é uma sentença de Horn.

Exemplo 1.

1. $\neg EmCasa(clara) \wedge (EmCasa(marco) \vee Feliz(carlos))$.

   Na segunda sentença componente da conjunção há dois literais positivos.

2. $(EmCasa(clara) \vee EmCasa(marco) \vee \neg Feliz(clara)) \wedge \neg Feliz(carlos)$.

   Na primeira sentença componente da conjunção há dois literais positivos.

3. $EmCasa(clara) \vee EmCasa(marco) \vee \neg EmCasa(carlos)$.

   Uma disjunção em que há dois literais positivos.

Por outro lado, todas as sentenças do exemplo que se segue são sentenças de Horn.

Exemplo 2.

1. $\neg EmCasa(clara) \wedge (\neg EmCasa(marco) \vee Feliz(carlos))$.

   Na segunda sentença componente da conjunção há exactamente um literal positivo.

2. $EmCasa(clara) \wedge EmCasa(marco) \wedge \neg EmCasa(carlos)$.

   Uma conjunção de três literais, os primeiros positivos e o terceiro negativo.

3. $EmCasa(clara) \vee \neg EmCasa(marco) \vee \neg EmCasa(carlos)$.

   Uma disjunção em que há apenas um literal positivo.

4. $EmCasa(clara) \wedge EmCasa(marco) \wedge (\neg EmCasa(marco) \vee \neg EmCasa(marco))$.

   Na terceira componente da conjunção, há uma disjunção sem literais positivos.

As sentenças de Horn são equivalentes a sentenças em que cada *disjunção de literais* é substituída por uma *implicação* de tipo especial.
Seja a sentença de Horn:

$$\neg EmCasa(clara) \vee \neg EmCasa(marco) \vee Feliz(carlos).$$

Esta sentença é tautologicamente equivalente à implicação

$$(EmCasa(clara) \wedge EmCasa(marco)) \rightarrow Feliz(carlos).$$

Por outro lado, supondo $A,\ B,\ C,\ D$ sentenças atómicas, tem-se

1. $(A \rightarrow B) \wedge ((B \wedge C) \rightarrow D) \Leftrightarrow (\neg A \vee B) \wedge (\neg B \vee \neg C \vee D)$
2. $((B \wedge C \wedge D) \rightarrow A) \wedge (A \rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \vee \neg C \vee \neg D \vee A) \wedge (\neg A \vee B)$

Em ambos os casos, a sentença do lado direito da equivalência lógica é uma sentença de Horn, enquanto a sentença de que se partiu é uma conjunção de implicações.
Uma sentença de Horn *típica* consiste numa conjunção de sentenças, cada uma das quais é uma disjunção de vários literais negativos e um literal positivo, digamos

$$\neg A_1 \vee \neg A_2 \vee \ldots \vee \neg A_n \vee B$$

Esta sentença pode ser reescrita na forma equivalente

$$(A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n) \rightarrow B.$$

No entanto, há duas excepções a esta forma *típica*.

- Disjunções de vários literais negativos e nenhum literal positivo.
- Disjunções de um literal positivo e nenhum literal negativo.

Para reescrever estas sentenças como implicações, introduzem-se dois símbolos $\top$ e $\perp$, que se tratam como sentenças atómicas. A primeira, $\top$, é sempre verdadeira, enquanto a segunda, $\perp$, é sempre falsa (já usámos este símbolo anteriormente, para representar contradição...)
Assim, uma disjunção com vários literais negativos e nenhum literal positivo

$$\neg A_1 \vee \neg A_2 \vee \ldots \vee \neg A_n$$

é tautologicamente equivalente a

$$(A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n) \rightarrow \perp .$$

Por sua vez, uma disjunção com um literal positivo e sem literais negativos

$$B$$

é tautologicamente equivalente a $\top \rightarrow B$.

Proposição 1. *Qualquer sentença de Horn é tautologicamente equivalente a uma conjunção de implicações de um dos tipos seguintes:*

1. $(A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n) \rightarrow B$
2. $(A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n) \rightarrow \perp$
3. $\top \rightarrow B$

em que $A_1, A_2, \ldots, A_n,\ B$ *são sentenças atómicas.*

Definição 2. Uma **sentença de Horn na forma condicional** é uma sentença, tautologicamente equivalente a uma sentença de Horn, que resulta de substituir cada disjunção de literais por uma implicação (com $\top$ e $\perp$, se necessário) de um dos tipos descritos na Proposição anterior.

Definição 3. Diz-se que uma sentença é ***tt*-satisfazível** se houver pelo menos uma linha da tabela de verdade em que a sentença seja verdadeira.

A tarefa de calcular se uma sentença é *tt*-satisfazível através do método das tabelas de verdade é puramente automática, pelo que é programável. No entanto, o método das tabelas de verdade é, em geral, dispendioso em termos de recursos, com crescimento exponencial em função do número de sentenças atómicas intervenientes.
Contudo, para as sentenças de Horn há um método muito eficiente para determinar se elas são, ou não, *tt*-satisfazíveis. Passamos a descrever o método.

Algoritmo de *tt*-satisfação para sentenças de Horn
Seja S uma sentença de Horn na forma condicional, construída a partir de sentenças atómicas $A_1, A_2, \ldots, A_n$, $\top$ e $\perp$. Suponhamos que S é $I_1 \wedge I_2 \wedge \ldots \wedge I_m$, onde cada I_k, $k \leq m$, é uma implicação de um dos tipos descritos na Proposição 1.
Passo 1. Se alguma das implicações I_k é do tipo $\top \rightarrow A_i$, atribui-se o valor `V` a A_i. Faz-se isto para todas as implicações deste tipo.
Passo 2. Se alguma das implicações I_k é do tipo $(B_1 \wedge B_2 \wedge \ldots \wedge B_t) \rightarrow A$ e se se atribuiu o valor `V` a todas as sentenças B_j, $j \leq t$ por aplicação dos passos anteriores, então atribui-se também o valor `V` a A.
Passos seguintes. Repita-se o passo 2 para as implicações I_k nas condições enunciadas.
Último passo. Há duas possibilidades:

(1) Há uma implicação do tipo $(B_1 \wedge B_2 \wedge \ldots \wedge B_t) \rightarrow\perp$ que é necessariamente falsa, pois já se atribuiu o valor `V` a todas as sentenças $B_1, B_2, \ldots, B_t$. Neste caso, S não é tt-satisfazível.

(2) Caso contrário, atribua-se às restantes sentenças atómicas (cujo valor de verdade não foi fixado nos passos anteriores) o valor `F`. Esta atribuição de valores de verdade torna S verdadeira. Portanto, S é tt-satisfazível.

Note bem. Se, ao iniciar o algoritmo, nenhuma das implicações I_k é do tipo $\top \rightarrow A_i$, este pára de imediato; atribuindo-se o valor `F` a todas as sentenças atómicas $A_1, A_2, \ldots, A_n$, a sentença S é *verdadeira*. Consequentemente, S é tt-satisfazível.

Exemplo 3. *Sejam A, B, C, D, E, F sentenças atómicas e seja S a sentença de Horn*

$$(\neg B \vee \neg D \vee F) \wedge (\neg D \vee \neg F \vee C) \wedge D \wedge (\neg F \vee \neg E \vee \neg A) \wedge B \wedge (\neg B \vee \neg F \vee E)$$

A sua forma condicional é

$$((B \wedge D) \rightarrow F) \wedge ((D \wedge F) \rightarrow C) \wedge (\top \rightarrow D) \wedge$$

$$((F \wedge E \wedge A) \rightarrow \perp) \wedge (\top \rightarrow B) \wedge ((B \wedge F) \rightarrow E)$$

Os passos do algoritmo de Horn para esta sentença são:

Passo 1. *Atribui-se a D e a B o valor* `V`.
Passo 2. *Atribui-se a F o valor* `V`.
Passo 3. *Atribui-se a C e a E o valor* `V`
Passo 4. *A sentença é satisfazível. Com a seguinte atribuição de valores de verdade a sentença é verdadeira: B, C, D, E, F com valor* `V` *e A com valor* `F`.